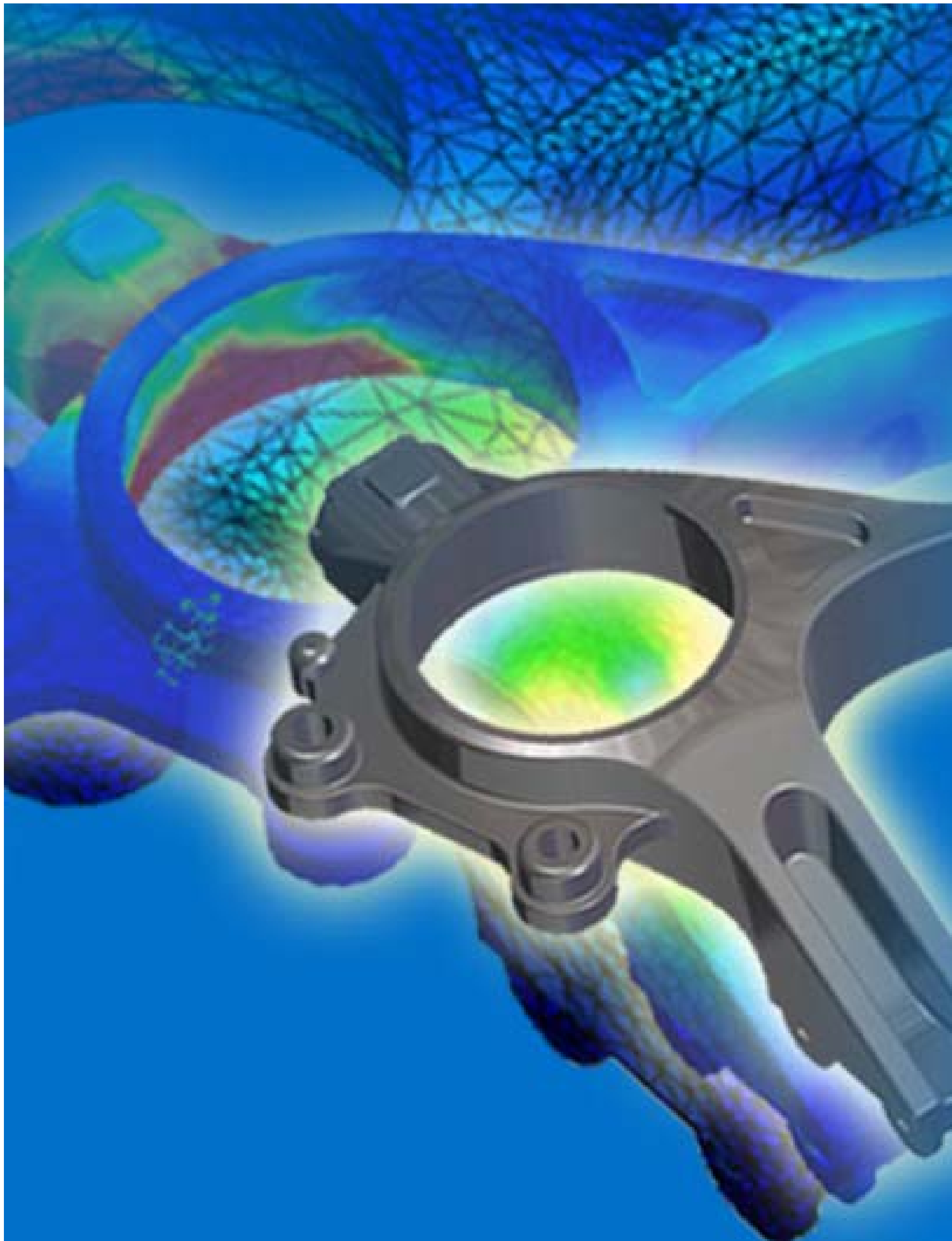


Modelovanje i simulacija procesa deformisanja

Nastavnik:
Doc. dr Mladomir Milutinović

Asistent:
Mr Dejan Movrin

MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Matematičko modelovanje procesa deformisanja je postupak matematičkog opisivanja procesa deformisanja. Sa jedne strane, ovaj opis mora biti relativno jednostavan, a sa druge strane i dovoljno tačan, da bi odgovorio svojoj nameni koja je definisana od strane kreatora modela.
Matematički model se obično sastoji od skupa jednačina kojima treba da su opisane sve važnije pojave ili procesi značajni za postavljeni problem. Karakteristike sredine ili objekata izražene su kroz koeficijente jednačina.
Za nalaženje rešenja formulisanog modela matematickim metodama koriste se kako ***determinističke (analitičke i numeričke)*** tako i ***heurističke metode i veštačka inteligencija.***

Klasična (analitička) matematika - osnovni cilj utvrditi pod kojim uslovima postoji rešenje nekog zadatka i koje su osobine tog rešenja.
Numeričke matematika - efektivno nalaženje rešenja sa zadatom tačnošću. Ta tačnost treba da bude nešto veća od tačnosti koju obezbeđuje matematički model, ali ne ni suviše visoka, jer se tačnost približnog rešenja i tako neće povećati s obzirom na usvojeni model.
Heurističke metode i metode „veštačke inteligencije“ - se koriste kako bi se ubrzao proces pronalaženja dovoljno dobrog rešenja, u situacijama kada je kompletno pretraživanje nepraktično. Tehnike rešavanja problema, učenja i otkrivanja koji su bazirani na iskustvu.

MATEMATIČKO MODELOVANJE PROCESA DEFORMISANJA

Analitičke metode

- Metoda ravnih preseka (inženjerska metoda)
- Metoda linija klizanja
- Metoda vizioplastičnosti (teorija+exp.)
- Metoda gornje granice
- Varijaciona metoda
- Metoda deformacionog rada

Heurističke metode i metode veštačke inteligencije

- Ekspertni sistemi
- Soft computing
- Monte Carlo
- Genetski algoritam
- Evoluciono programiranje
- Neuronske mreže
- Fuzzy logic
- Simulirano kaljenje
- Tabu algoritam i dr.

Numeričke metode

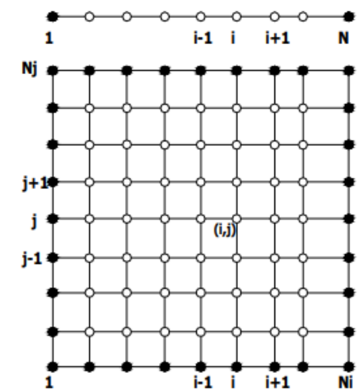
- UBET
- MUBET
- Metoda Konačnih Elemenata
- Metoda Konačnih Zapremina
- Metoda Konačnih Razlika
- Metoda Graničnih Elemenata
- Metoda reziduuma

U numeričkom pristupu rešavanja pojedinih tehničkih problema najčešće se koristite neke od sledećih **numeričkih metoda:**

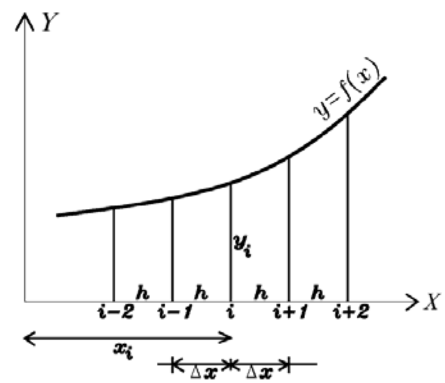
- **Metoda konačnih razlika (Finite Diferences Method)** predstavlja numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina na taj način što se prirast *df* funkcije *f(x)* zameni konačnom razlikom (diferencijom) *Δf* funkcije *f(x)*.
- **Metoda graničnih elemenata (Boundary Element Method)** alternativna je metodi konačnih elemenata uz neke njoj specifične karakteristike: mali broj jednačina sistema, jednostavna priprema i obrada podataka, dobra aproksimacija koncentracije naprezanja, itd. '
- **Metoda konačnih zapremina (Finite Volume Method)** alternativna je metodi konačnih elemenata za analizu naprezanja i deforinacija, kako čvrstih tela, tako i termoplastičnih.
- **Direktna metoda konačnih elemenata** (Direct Finite Element Method) koristi se za rešavanje relativno jednostavnih problema, npr. mašinski elementi jednostavnog oblika, statika linijskih konstrukcija i slično. Zato je ova metoda polazna osnova za širu inteipretaciju MKE, zbog svoje jednostavnosti i fizičkog značenja.
- **Varijaciona metoda konačnih elemenata** (Variational Finite Element Method) temelji se na varijacijskom principu virtualnih pomaka i principu virtualnih naprezanja. Varijacijska metoda se jednako uspješno primenjuje za jednostavne i složene probleme. Kod postavljanja matričnih jednačina konačnog elementa više se primjenjuje varijacijska metoda nego direktna.
- **Metoda energetskog bilansa** (Energy Balance Finite Element Method) temelji se na bilansu različitih vidova energije, zbog čega ima širu primenu u termostatičkoj i termodinamičkoj analizi kontinuuma.
- **Metoda reziduuma-ostatka** (Residual Finite Element Method) temelji se na diferencijalnim jednačinama razmatranog problema. Naročitu primenu ima kod problema gde je teško formulisati funkcional ili kod problema gde funkcional ne postoji

METODA KONAČNIH RAZLIKA

- Metoda konačnih razlika najstarija je metoda za numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina (Euler u 18. veku). To je ujedno i najjednostavnija metoda ako se koristi jednostavna geometrija.
- Bazira se na matematičkoj diskretizaciji diferencijalnih jednačina prevodjenjem na jednačine sa konačnim razlikama
- Najčešće se koriste strukturalne mreže kojima su linije poravnate sa linijama koordinatnog sistema. Obično se kreće od jednačina očuvanja u diferencijalnim oblicima koje je potrebno diskretizirati.
- Na svakom čvoru mreže aproksimira se polazna diferencijalna jednačina tako da se parcijalne ***derivacije (izvodi) u jednačinama zamene sa aproksimacijskim izrazima u tekućem čvornom mestu***. To rezultira jednom algebarskom jednačinom po čvoru mreže, u kojoj su nepoznate vrednosti promenjive tog i određenog broja susednih čvorova. Naravno, broj jednačina i broj nepoznatih moraju biti jednaki.
- Za računanje jednačina u čvorovima potrebne su nam aproksimacije izvoda. Najčešće korištene metode za aproksimacije izvoda-derivacija su aproksimacija pomoću Taylorovog razvoja u red i aproksimacija polinomom (engl. polinomical fitting) .

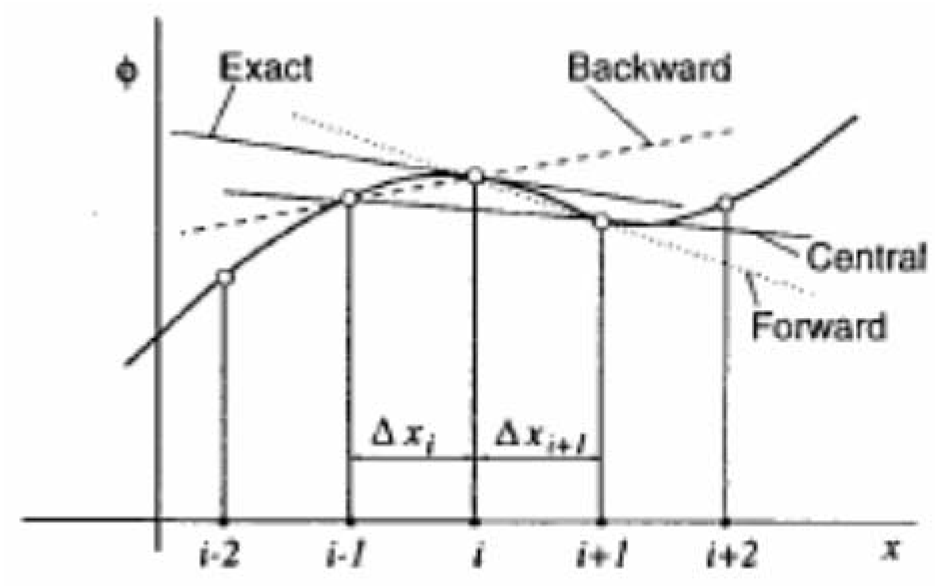


$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$



Osnovna ideja za metodu konačnih razlika leži u definiciji prvog izvoda funkcije u tački x_i.

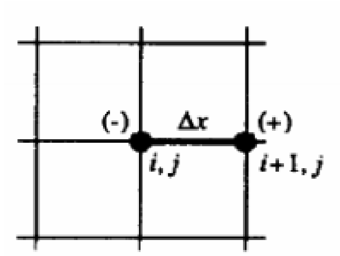
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) - \left(\frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

METODA KONAČNIH RAZLIKA

$$u_{i+1,j}=u_{i,j}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}\Delta x+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{(\Delta x)^2}{2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{(\Delta x)^3}{6}+\dots$$

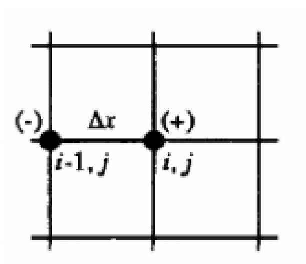


$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}=\underbrace{\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}}_{(1)}\underbrace{-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{(\Delta x)^2}{2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{(\Delta x)^3}{6}+\dots}_{(2)}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}\approx\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

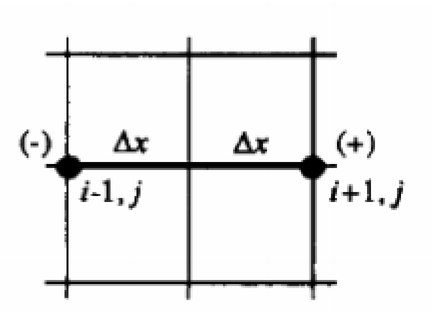


$$u_{i-1,j}=u_{i,j}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}(-\Delta x)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{(-\Delta x)^2}{2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{-\Delta x)^3}{6}+\dots$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

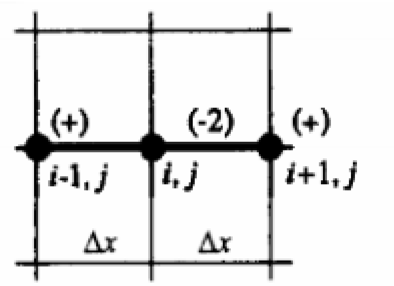
Aproksimacija prve derivacije prvog reda tačnosti

METODA KONAČNIH RAZLIKA



$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

Aproksimacija prve derivacije drugog reda tačnosti



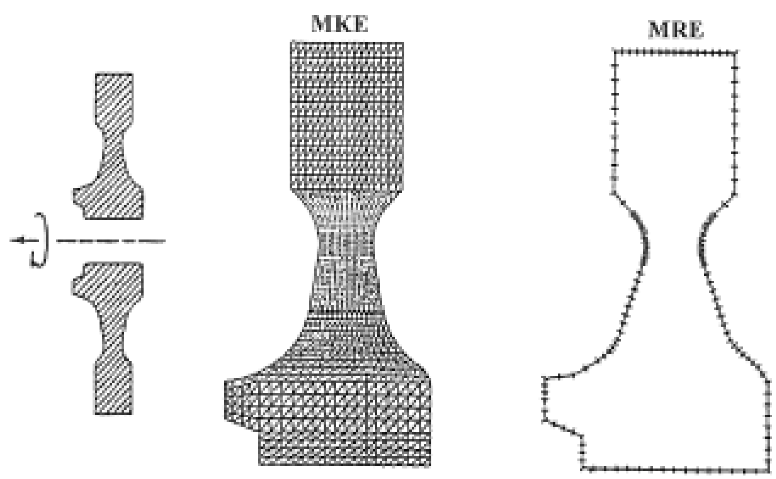
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

Aproksimacija druge derivacije drugog reda tačnosti

METODA GRANIČNIH ELEMENATA

- Specifična metoda prelaza iz sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina i zadatih graničnih uslova ka njihovoj integralnoj analogiji na granici oblasti koju posmatramo.
- Postupak se sastoji u diskretizovanju granične oblasti strukture graničnim elementima, primenom različitih vrsta aproksimacija geometrije granica i graničnih funkcija. Iz integralnih odnosa, diskretnom analogijom, formira se sistem algebarskih jednačina. Rešavanjem sistema dolazi se do traženih veličina na granicama oblasti.

- Prednosti:
  - Diskretizacija se zaheva samo na granicama (granični-rubni elementi).
  - Manji broj stepeni slobode, odnosno sistema jednačina.
  - Jednostavnija priprema podataka.
  - Selektivno i tačno vrednovanje samo za prethodno odabrane unutrašnje tačke.
  - Bolja preciznost kod problema koncentracije naprezanja (dobra aproksirnacija singulariteta).
  - Pogodna kod modeliranja simetričnih problema i beskonačno graničnih područja



METODA GRANIČNIH ELEMENATA

plastičnog tečenja može se prikazati funkcijom naprezanja, odnosno plastičnog potencijala:

$$F(\sigma_{ij},k)=\sqrt{3J_2}-\sigma_0=0 \qquad (6.96)$$

gdje su: $J_2=\dfrac{\sigma_{ij}^*\sigma_{ij}^*}{2}$, druga invarijanta devijatorskog naprezanja,

$\sigma_0=\sigma_0(k)$, granica plastičnog tečenja,

$S_{ij}=\sigma_{ij}^*=\sigma_{ij}-\dfrac{S\delta_{ij}}{3}$, komponente devijatora tenzora naprezanja,

$S=\sigma_{kk}$, naprezanja po dijagonali matrice,

$\sigma_e=\sqrt{3J_2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}\sigma_{ij}^*\sigma_{ij}^*}$, ekvivalentno naprezanje.

Za plastično tečenje po Prandtl – Reussu:

$$d\varepsilon_{ij}^p=d\lambda\sigma_{ij}^*, \qquad (6.97)$$

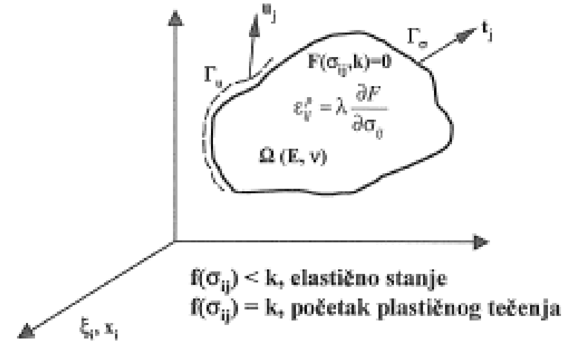
gdje je: $d\lambda$ - faktor proporcionalnosti.

Elasto – plastično stanje određeno slikom 6.22. i temeljem integralne jednadžbe glasi:

$$\int\left(T_{jk}u_j-t_jU_{jk}\right)d\Gamma=\int\left(\sum\nolimits_{ijk}\varepsilon_{ij}-\sigma_{ij}E_{ijk}\right)d\Omega, \qquad (6.98)$$

gdje su: T_{jk} – vektor rubnog naprezanja,
U_{jk} – vektor rubnog pomaka,
Γ – kontura,
Ω - područje okruženo konturom Γ,
u_j – vektor rubnog pomaka u području Γ_u (radijalni pomak plastičnog fronta),
Γ_σ - površina - područje,

$\sum_{ijk}, E_{ijk}$ - zamišljena podudarna naprezanja i komponente istezanja pripadajuće jedinice opterećenja F_k.



Stvarna naprezanja i deformacije su dio unutar čistog elastičnog i dodatnog plastičnog dijela, tj.

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^e+\sigma_{ij}^p; \qquad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^e+\varepsilon_{ij}^p \qquad (6.99)$$

Hookeov zakon određuje:

$$\sigma_{ij}=2\mu\left[\left(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^p\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\left(\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{kk}^p\right)\right] \qquad (6.100)$$

ili s općim početnim naprezanjem

$$\sigma_{ij}=2\mu\left[\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right]-\sigma_{ij}^p, \qquad (6.101)$$

gdje je: $\mu=G$,

$$\sigma_{ij}^p=2\mu\left[\varepsilon_{ij}^p+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}^p\right]. \qquad (6.102)$$

METODA GRANIČNIH ELEMENATA

Unošenjem (6.99) u izraze (6.100) do (6.102) slijedi:

$$\int \left(T_{jk} u_j - t_j U_{jk}\right) d\Gamma = \int \sigma_{ij}^{p} E_{ijk} \, d\Omega \, , \qquad (6.103)$$

za početno naprezanje, prema (6.102)

$$\int \sigma_{ij} E_{ijk} \, d\Omega = \int \sum\nolimits_{ijk} \varepsilon_{ij}^{p} \, d\Omega \, , \qquad (6.104)$$

također početna formulacija deformacije glasi:

$$\int \left(T_{jk} u_j - t_j U_{jk}\right) d\Gamma = \int \sum\nolimits_{ijk} \varepsilon_{ij}^{p} \, d\Omega \, . \qquad (6.105)$$

Unutar granice procesa kada $\Gamma_\varepsilon \to 0$ i $\Omega_\varepsilon \to 0$ integral jednadžbe za neelastični rubni element definiran je u sljedećem obliku:

$$C_{jk}(x_i) u_j(x_i) + \int T_{jk}(x_i, \xi_i) u_j(\xi_i) - t_j(\xi_i) U_{jk}(x_i, \xi_i) d\Gamma(\xi_i) = \int \sum\nolimits_{ijk} \varepsilon_{ij}^{p} \, d\Omega \, . \quad (6.106)$$

Prikazana jednadžba (6.106) se zatim modelira i numerički rješava. Slijedi rezultirajuća matrica jednadžbe sistema u obliku:

$$Au = Bt + D\varepsilon^{p} \, , \qquad (6.107)$$

odnosno za rubne uvjete dobiva se:

$$Ax = r + D\varepsilon^{p} \, , \qquad (6.108)$$

što se rješava inverzijom za nepoznate zamjene i otpore (reakcije):

$$x = A^{-1} r + A^{-1} D\varepsilon^{p} = x^{e} + K\varepsilon^{p} \, . \qquad (6.109)$$

Prirast definiran jednadžbom (6.109) jest:

$$x_i = \lambda_i x^{e} + K\left(\varepsilon_{ij}^{p} + \Delta\varepsilon_i^{p}\right), \qquad (6.110)$$

dok će naprezanje biti u obliku:

$$\sigma = A' x + r' + D\varepsilon^{p} \qquad (6.111)$$

i uzimanjem u obzir jednadžbu (6.109) slijedi:

$$\sigma = A' x^{e} + r' + \left(A' K + D\right)\varepsilon^{p} = \sigma^{e} + K\varepsilon^{p} \, . \qquad (6.112)$$

Prirast za ovaj izraz glasi:

$$\sigma_i = \lambda_i \sigma^{e} + K\left(\varepsilon_{i-1}^{p} + \Delta\varepsilon_i^{p}\right), \qquad (6.113)$$

što reprezentira bazu algoritma.

U prvom koraku je pretraživanje rješenja elastičnosti za:

$$x^{e} = A^{-1} r, \qquad \sigma^{e} = A' x^{e} + r' \qquad (6.114)$$

i ponovna usporedba maksimalne vrijednosti ekvivalentnog naprezanja:

$$\sigma_e^{max} = \sqrt{3J_2} \, . \qquad (6.115)$$

Ovako određen početni faktor opterećenja:

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_e^{max}} \qquad (6.116)$$

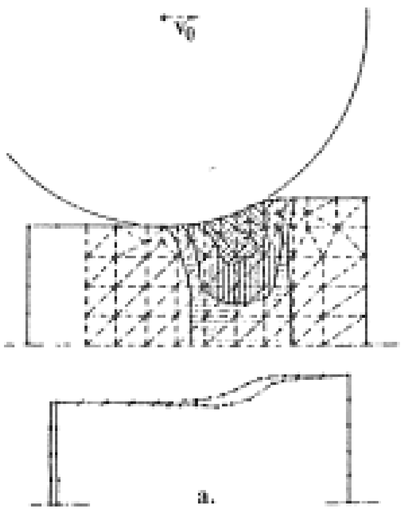
i prirast plastičnosti iteracijom može početi:

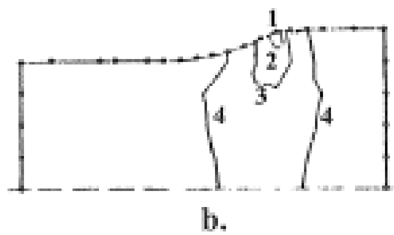
$$x = x^{e} + K\varepsilon^{p} \, , \qquad \sigma = \sigma^{e} + K\varepsilon^{p} \, , \qquad (6.117)$$

procedurom korak po korak.

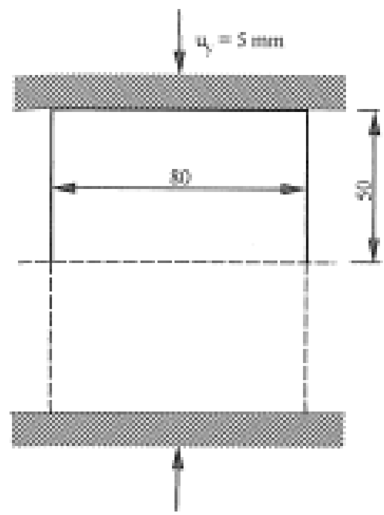
Detaljniji podaci o MRE mogu se naći u literaturi [6,7,52,53,54].

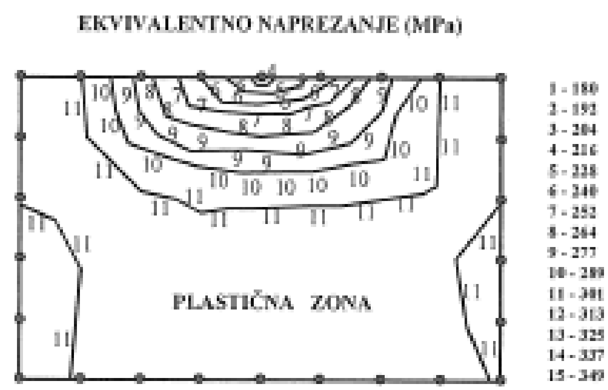
METODA GRANIČNIH ELEMENATA





Slika 6.24. Valjanje ploče a. širenje plastične zone i kontura deformacija, b. konture naprezanja na početku plastifikacije, 1 – 250 MPa naprezanje tečenja; 2 – 180 MPa, 3 – 100 MPa, 4 – 50 MPa



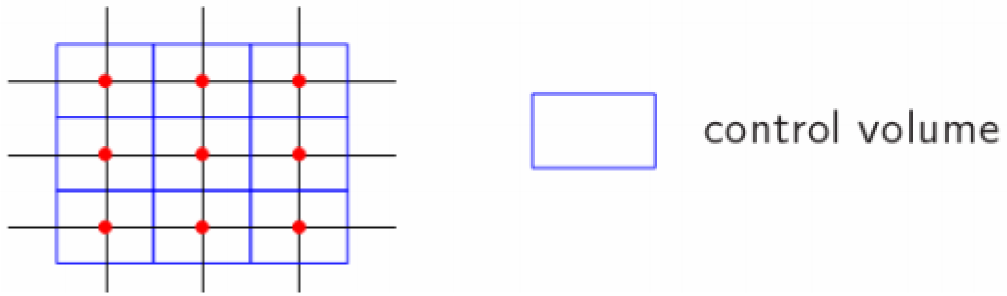


METODA KONAČNIH ZAPREMINA (kontrolnih volumena)

- Metoda konačnih zapremina (MKZ) ima najveću primenu u numeričkoj mehanici fluida.
- Iterativnost MKV čini je pogodnom za analizu nelineranih problema
- Najčešće kreće od integralnog oblika zakona očuvanja.

$$Q_{ul} + Q_{gen} - Q_{iz} = Q_{sač}$$

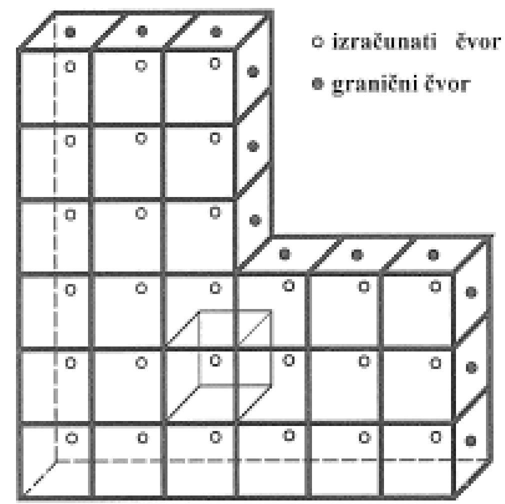
- Domen rešenja je podeljen u konačan broj kontrolnih volumena-zapremina (engl. control volumes - CV) ili ćelija (engl. cells ili voxels). Jednačine očuvanja se primenjuju na svaku od ćelija. U centru svake ćelije se nalazi čvor u kojemu se izračunavaju vrednosti promenjivih (u nekim slučajevima neke od vrednosti se postavljaju na stranice ćelija). Ostale vrednosti se dobivaju interpolacijom.
- Površinski i zapreminski integrali se aproksimiraju odgovarajućim kvadratnim formulama. Kao rezultat dobija se algebarska jednačina za svaku ćeliju u kojima se pojavljuju neke vrednosti susednih ćelija. Ova metoda podržava bilo kakav tip mreže te je pogodna i za kompleksne geometrije.

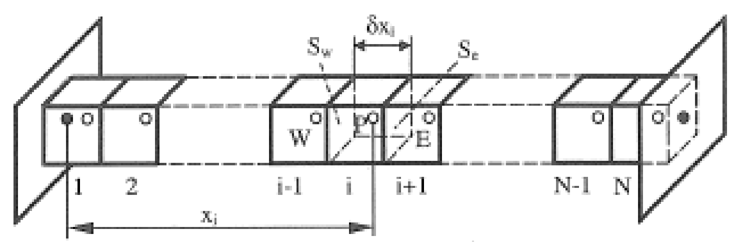


METODA KONAČNIH ZAPREMINA

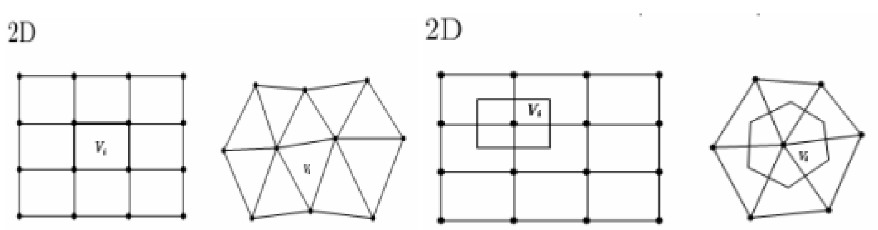
Diskretizacija metodom konačnih zapremina

- Diskretizacija se sastoji u definisanju numeričke mreže koja se sastoji od konačnog broja računskih tačaka koje zamenjuju kontinualnu funkciju, npr. u =u(r,t), T = T(r,r) odgovarajućim vrednostima u datim tačkama.
- Numerička aproksimacija je bolja, što je veći broj računskih tačaka. Prema tome, čvrsto telo se deli na konačan broj kontinualnih kontrolnih zapremina- volumena ili ćelija volumena V ograničenih površinom S, koja se sastoji od određenog broja ćelijskih površina (Sk).
- Računski čvorovi su postavljeni u centar svakog prostora (KZ), a granični čvorovi su postavljeni u centar granične površine ćelije i služe za defonisanje graničnih uslova
- Diskretizacija prostora MKZ, radi jednostavnosti, deli prostor na N jednakih kontrolnih volumena

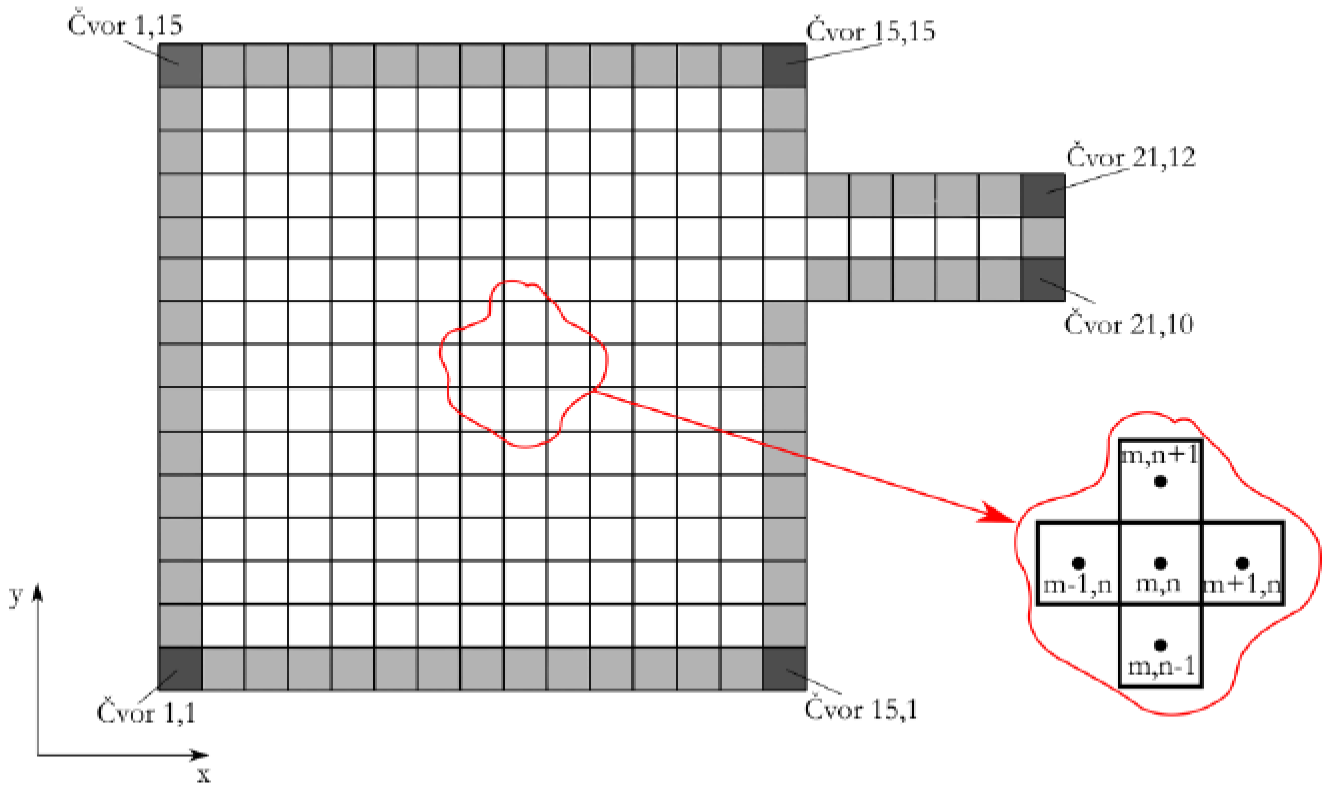


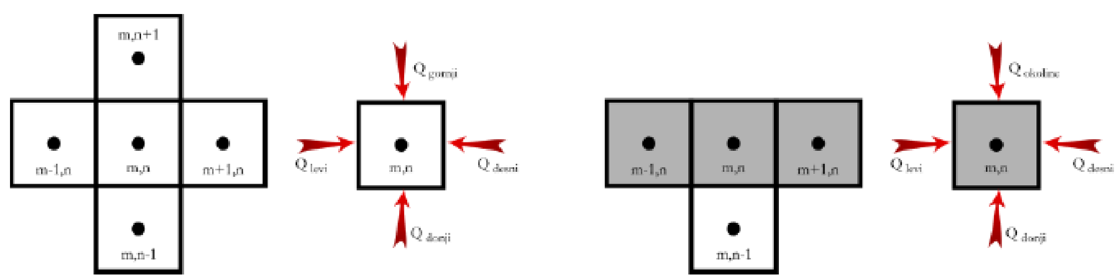


$$\delta x_i = \frac{L}{N} = \delta x \quad (i = 1, 2, ...N)$$



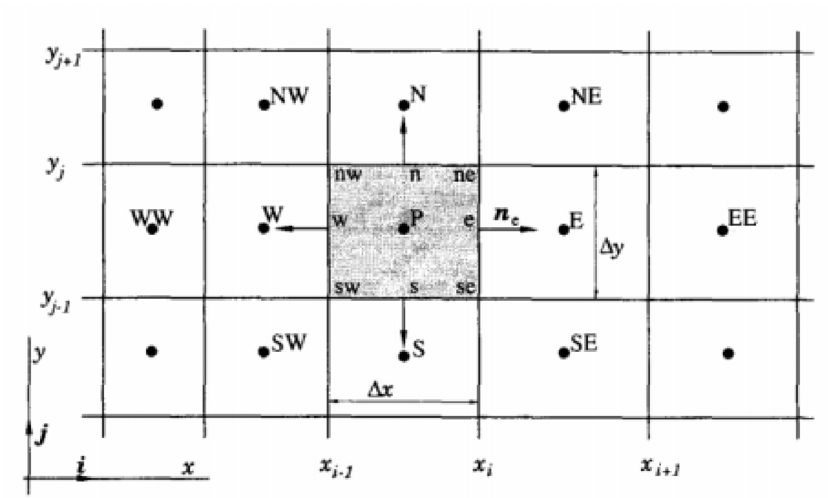
METODA KONAČNIH ZAPREMINA





METODA KONAČNIH ZAPREMINA

Za rešavanje sistema ovom metodom potrebne su aproksimacije površinskih i zapreminskih integrala.



Površina ćelije sastoji se od 4 (u 2D prostoru) ravne stranice, označene sa malim slovima koja odgovaraju njihovim smerovima (e, w, n, s) u odnosu na čvor P koji se nalazi u centru ćelije.

Tok kroz granice ćelija - suma integrala kroz sve četiri stranice

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS \,,$$

Za računanje površinskog integrala potrebno je poznavati funkciju ***f*** duž cele površine S. Ta informacija nije dostupna, osim u čvorovima (koji se nalaze u centrima ćelija) te je potrebna aproksimacija koja se odvija u dva koraka:

- integral se aproksimira izrazima sastavljenim od vrednosti promenjivih na jednoj ili više lokacija na stranicama ćelija
- vrednosti na stranicama ćelija se aproksimiraju od vrednosti u čvorovima (centrima ćelija)

METODA KONAČNIH ZAPREMINA

1. Najjednostavnija aproksimacija integrala je pravilo središnje tačke (engl. midpoint rule) : integral je aproksimiran kao prozvod integranta (vrednosti funkcije) u središtu stranice ćelije (što je samo po sebi aproksimacija srednje vrednosti površine) i područja stranice ćelije:

$$F_e = \int_{S_e} f dS = \bar{f}_e S_e \approx f_e S_e$$

Ovakva aproksimacija integrala je drugog reda tačnosti i zahteva vrednost integranta ***f*** na lokaciji "e".
S obzirom da vrednost od ***f*** nije poznata na lokaciji "e", potrebno ju je dobiti interpolacijom.
Da bi se sačuvala tačnost drugog reda koje donosi pravilo središnje tačke, vrednost ***fe*** treba se računati postupkom koji je isto tako barem drugog reda tačnosti.

2. Drugi način aproksimacije površinskog integrala drugog reda tačnosti u 2D prostoru je pravilo trapezoida, koje vodi do izraza:

$$F_e = \int_{Ss_e} f dS \approx \frac{S_e}{2}(f_{ne} + f_{se})$$

U tom slučaju potrebno je izraziti tok u uglovima ćelija. Za aproksimacije višeg reda, tok mora biti računat na više od dve lokacije. Aproksimacija četvrtog reda je Simpsonovo pravilo, koje aproksimira integral kao:

$$F_e = \int_{Ss_e} f dS \approx \frac{S_e}{6}(f_{ne} + 4f_e + f_{se})$$

METODA KONAČNIH ZAPREMINA

Volumenske i površinske sile

Volumenske sile djeluju na cijelu masu elementa čvrstog tijela i prikazuju se kao sile po jedinici mase čvrstog elementa (sile gravitacije, sile inercije, magnetne sile, itd.).

Površinske sile nastaju djelovanjem direktnim kontaktom na element čvrstog tijela i prikazuju se kao sile po jedinici površine čvrstog elementa (kontaktne sile, sile inercionog trenja, itd.).

Volumenska sila f_b u točki elementa čvrstog tijela je granična vrijednost rezultantne sile ΔF_b koja djeluje na sve točke elementa čvrstog tijela i mase tog elementa $\Delta m = \rho \Delta V$, tj.

$$f_b = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta F_b}{\Delta m} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F_b}{\rho \Delta V}. \qquad (6.119)$$

Ukupna volumenska sila iznosi:

$$F_b = \int_m f_b dm = \int_V \rho\, f_b dV. \qquad (6.120)$$

Isto tako površinska sila u točki čvrstog tijela iznosi:

$$f_s = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta S}. \qquad (6.121)$$

Ukupna sila koja djeluje na konačnu površinu:

$$F_s = \int_S f_s dS , \qquad (6.122)$$

gdje je: ΔF_s – rezultanta svih sila koje djeluju na površinu ΔS.

Jednadžba o održanju momenta količine kretanja

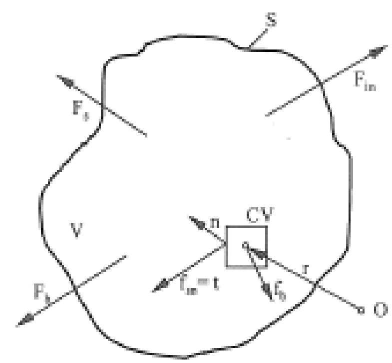
Prvi Cauchyjev[1] zakon kretanja [10], izveden prema drugom Newtonovu zakonu primijenjenom na čvrsto tijelo, ima oblik:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int_S \sigma\, n\, dS + \int_V \rho\, f_b dV \ , \qquad (6.123)$$

gdje su:
- σ - tenzor naprezanja, odnosno $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i \neq j$, tenzor naprezanja,
- ρ - gustoća,
- V – volumen,
- S – površina,
- u – vektor pomaka,
- f_b – rezultanta volumenskih sila koja djeluje na tijelo,
- n – jedinični vektor normale,
- t – vrijeme.

U izrazu (6.123) prvi član su inercione sile, drugi član se odnosi na površinske sile, a treći član na volumenske sile.

Izraz (6.123) važi za cijelo tijelo ili za dio volumena V ograničenog površinom S, s vanjskim jediničnim vektorom normale n na površini S (slika 6.28.).



Slika 6.28. Djelovanje volumenskih i površinskih sila na čvrsto tijelo

METODA KONAČNIH ZAPREMINA

Tenzor naprezanja σ, komponente pomaka u, vektor normale n i masene sile f_b mogu se pisati u obliku:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \quad u = \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix}, \quad f_b = \begin{vmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{vmatrix}, \qquad (6.124)$$

odnosno konstitutivne relacije [55]:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - (2\mu + 3\lambda)\alpha T$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - (2\mu + 3\lambda)\alpha T \qquad (6.125)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - (2\mu + 3\lambda)\alpha T$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\mu\varepsilon_{yz};$$

gdje su: $\mu = G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, Lameovi koeficijenti,

ν - Poissonov koeficijent,
E – Youngov modul elastičnosti,
G – modul smicanja,
α - koeficijent linearnog širenja.

6.4.4. Početni i granični uvjeti

Matematički model se smatra kompletnim kada ima određene početne i granične uvjete, zašto se mora izabrati određeni broj i tip ovih uvjeta. Problem je dobro postavljen kada ima rješenja koja su jedinstvena i kontinuirano ovisna od početnih i graničnih uvjeta. Početni uvjet može biti raspored pomaka, npr. $u(x,y,z,0) = u_0$, $v(x,y,z,0) = v_0$.

Kod definiranja graničnih uvjeta moguće je primijeniti više vrsta graničnih uvjeta, međutim svi se mogu klasificirati u dvije grupe:

- Dirichletovi granični uvjeti, gdje je na granicama zadana vrijednost zavisno promjenjive (npr. zadani pomak ili temperatura).
- Neumannovi granični uvjeti kada su zadane vrijednosti gradijenta zavisno promjenjive (npr. zadano naprezanje).